REFERENCES

Gelbaum, B R & Olmstead, J M H 1964 *Counterexamples in Analysis* San Francisco (Holden-Day)
Medvedev, R A 1961a "On Cauchy's Co-existing Magnitudes," in *Istoriya fizikomatematicheskikh nauk* 43, M., Izd.-vo A N S S S R, 264-289
——— 1961b "A M Lyapunov's Contribution to the Theory of Stieltjes's Integral," *Ist. Mat. Iss.* 14. 211-234
——— 1963 "The Development of the Concept of the Stieltjes Integral," *Ist. Mat. Iss.* 15, 171-224
——— 1965 "G Peano and Set Functions," *Ist. Mat. Iss.* 16, 311-323
Pesin, I N 1970 *Classical and Modern Integration Theories* New York (Academic Press) [translated from Russian]

LOBATCHEVSKI. By V. F. Kagan. Moscow (Edition Mir). 1974.

Reviewed by Imre Toth,
Universität Regensburg, Regensburg, FRG

Ce n'est pas, certainement, un compliment de dire que le livre de Veniamin Feodorovitch Kagan (1869-1953) est le meilleur qu'on ait jamais écrit sur Lobatchevski, puisque c'est, tout simplement, l'unique biographie du géomètre russe, élaborée à partir d'une connaissance de la quasi-totalité des documents archivistiques. C'est donc un livre dont personne ne peut se passer qui s'intéresse à l'histoire de la géométrie non-euclidienne. Kagan était un des mathématiciens soviétiques les plus distingués de la première moitié du siècle et il aurait été difficile de trouver un auteur plus compétent, dans le domaine de la géométrie, pour écrire ce livre. L'État Soviétique a récompensé son activité scientifique en lui conférant le titre de 'Homme de Science Emérite' (1929), l'Ordre du Drapeau Rouge (1940) et le Prix d'Etat (1943). Le présent livre est la traduction française--revue et mise au point par Boris Laptev--de l'original russe; (probablement de la seconde édition, 1948). Son utilité et son mérite consistent dans l'extrême richesse des détails biographiques et dans la profondeur de l'analyse mathématique de l'oeuvre de Lobatchevski. On a vraiment l'impression que rien, fût-ce l'événement le plus insignifiant de la vie de Lobatchevski, n'a pas été omis. Au-delà du récit biographique, le livre de Kagan offre au lecteur aussi la possibilité de se familiariser avec la géométrie non-euclidienne, comme doctrine scientifique. S'il restent des points de discussion, ils ne visent que le style historiographique du livre.

Le lecteur est d'abord frappé de rencontrer, dans ce livre, deux Lobatchevski (1792-1856) bien distincts. L'un, c'est l'inventeur de la géométrie non-euclidienne et, implicitement, un révolutionnaire de l'univers scientifique; l'autre, le fonctionnaire exemplaire du gouvernement du tzar: trois fois (1820-1825) doyen, six fois (1827-1845) recteur (mis à la retraite en 1846); il se jouit de la confiance, de la considération et du soutien de ses supérieurs hiérarchiques, qui le comblent de distinctions; (il est sept fois décoré des ordres les plus importants de l'Empire, on lui confère le titre de conseiller d'état, et, le Tsar, lui accorde, en 1838, un titre de noblesse héréditaire avec blason). Les détails biographiques, fournis par Kagan, permettent de tirer la conclusion que cette avalanche de distinctions n'a pas été déclenchée seulement par ses contributions scientifiques. En effet Lobatchevski a toujours donné des preuves de loyauté à l'égard du gouvernement. Deux épisodes, racontés par Kagan, (85-91), sont signifiants à cet égard. En 1821 et 1822 deux procès ont été intentés à un groupe de professeurs de l'université de Pétersbourg et à un professeur de Kazan, (de droit, de statistique et géographie, de langues et littératures classiques, respectivement), pour avoir exprimé, dans leurs cours, des idées 'nuisibles parce que dirigées contre la religion et le pouvoir' (86). Lobatchevski a accepté de participer à cette enquête. Son avis était 'défavorable ... fournissant ainsi à Magnitzki'--(son chef hiérarchique, inspirateur des procès)--'la possibilité d'affirmer qu'il a démasqué les professeurs de Pétersbourg secondé par Lobatchevski' (86). Conséquence: son collègue de Kazan, Solntzev, est destitué; le titre de professeur lui est retiré avec l'interdiction de jamais occuper un poste dans l'enseignement. Immédiatement après sa participation au procès de Pétersbourg, Magnitzki sollicite de conférer à Lobatchevski une importante décoration. Argument: les services rendus dans le procès. Immédiatement après son retour de Pétersbourg à Kazan, (Février 1822), Lobatchevski est promu professeur titulaire (78). Il est âgé de 29 ans. Ses anciens professeurs et quelques-uns de ses collègues ont une excellente opinion de ses qualités scientifiques brillantes, mais sa réputation n'est pas du tout incontestée. Son premier travail, contenant sa grande découverte, ne sera publié qu'en 1829/30; (ce qui d'ailleurs n'améliorera pas son renom; 202-219, 284; v. aussi 93-99, 148-49). Il est donc fort douteux que son génie mathématique ait joué le rôle décisif dans sa promotion. Mais Kagan ne voit aucun rapport entre l'avancement de Lobatchevski et ses services rendus au procès de Péterbourg, et il met en doute si la décoration qu'il a obtenue a vraiment été une conséquence de la proposition faite par Magnitzki (87). Sans doute, on peut considérer, le comportement politique de Lobatchevski de différentes manières, selon les convictions politiques ou les principes éthiques qu'on a--(ou qu'on n'a pas). C'est une question d'option, ouverte à la discussion. De toute façon, les historiens du début de notre siècle (Zagoskin, 1902; Vassiliev, 1914; 85, 87) ont jugé avec assez de sévérité la collaboration de Lobatchevski aux procès de Pétersbourg et de Kazan. Kagan, en 1948, trouve que leur jugement manque de fondement. A son avis, 'il est douteux que Lobatchevski ait été en mesure de refuser cette tâche' (89), probablement, puisque 'les forces réactionnaires ... étaient alors extrêmement puissantes' (85). D'autres circonstances atténuantes invoquées par Kagan: Lobatchevski était 'pusillanime' (89); son avis négatif était sincère: la doctrine des droits naturels innés lui était 'toujours etranger' (87); un de ses collègues a aussi participé aux travaux de l'enquête et 'dans ces conditions, il aurait été bien difficile à Lobatchevski de se dérober' (86); le rapport d'enquête de Lobatchevski, pense Kagan, 'ne nuisit aucunement à l'accusé et n'influenča en rien la marche du procès'; enfin, comparé au 'zel odieux' de certains parmi ses collégues 'le comportement de Lobatchevski se distingue par sa retenue' (90). En lisant ce long plaidoyer, (85-91), on a l'impression que ce n'est pas seulement la conscience *ethique et politique* de Lobatchevski qui a été déterminée par son existence, mais celle de Kagan également. Zagoskin et Vassiliev réprouvaient--au début du siècle--l'attitude de Lobatchevski, puisqu'ils ont été incapables de le comprendre. Un demi-siècle après, Kagan ne l'était plus.

Mais le fait-divers biographique cache un problème plus profond. Comment une révolution scientifique aussi bouleversante que fut celle de Lobatchevski, a-t-elle pu être accomplie dans un ordre social et politique aussi hostile à toute innovation intellectuelle que celui de la Russie tzariste, et--par-dessus le marché--par un de ses adeptes, membre de l'establishment? C'est un mystère--et qui ne concerne pas le seul Lobatchevski. Il incombe à une future histoire sociale des sciences de rechercher cette dialectique du milieu socioculturel et de la création scientifique, même s'il est peu probable qu'une explication satisfaisante de ce problème puisse jamais être trouvée. Une chose est certaine: la conscience *géométrique* de Lobatchevski n'a été ni déterminée ni empêchée par son existence matérielle, encore bien féodale, de concevoir un espace non-euclidien. Sa démarche a été absolument libre. Libre non seulement de la tyrannie politique et sociale, libre non seulement de cette autre tyrannie, beaucoup plus sévère, dont parlait Poincaré, celle du monde extérieur, mais libre aussi de soi-même, de son autre moi. Et justement cette dernière donne la mesure de sa vraie grandeur. Pourtant, ce rapport, particulièrement intéréssant, entre les deux Lobatchevski, n'est pas abordé par Kagan.

Mais, ce qui est fort curieux, c'est justement la manière dont l'événement majeur que fut l'établissement de la géométrie non-euclidienne, est abordé par l'auteur. Ce qui l'intéresse avant tout c'est--semble-t'il--d'établir la 'priorité' de Lobatchevski et celá, non seulement dans le domaine de la *publication*, mais aussi dans celui de la *découverte* de la géométrie non-euclidienne. Lobatchevski a publié son premier travail, *Sur les principes de la géométrie* en cinq tranches (Févr.-Mars 1829--Juillet-Août 1830) dans le *Messager de Kazan*. Après les deux premières parties, ayant un caractère introductif et plutôt général, c'est la troisième partie (Nov.-Déc. 1829) où commence le développement proprement dit de la géométrie non-euclidienne, notamment, avec l'établissement des formules de la trigonométrie du plan hyperbolique (§ 10-14). La priorité juridique de la publication lui est ainsi assurée et jamais personne n'a même essayé de la contester. Gauss, on le sait, n'a jamais publié les résultats de ses recherches et, en ce qui concerne Bolyai, Kagan souligne partout qu'il n'a publié son travail que trois ans après Lobatchevski, en 1832 (v.p.ex. 323). Il omet de mentionner que la *Scientia Spatii absolute vera* de Bolyai a vu la lumière d'abord en 1831 (en Juin un exemplaire en fut envoyé à Gauss), en brochure séparée. L'écart entre la date où le travail de Lobatchevski a été achevé d'imprimer et la date de parution de la *Science absolue de l'espace* est en réalité de moins d'un an. Mais, la flexibilité de Kagan, dans la manipulation des dates de parution n'est pas du tout grave, et elle reste certainement entre les limites des omissions défendables. Plus discutable est, par contre, sa tentative d'attribuer à Lobatchevski aussi la priorité de *l'acte de création* de la géométrie non-euclidienne. On apprend, en effet, que Lobatchevski était 'le créateur d'une science nouvelle' la géométrie non-euclidienne, déjà à la date du '11(23) février' 1826; c'est, notamment, 'la date mémorable' où--selon l'avis de Kagan--'naquit la géométrie non-euclidienne, où 'un géomètre russe créa une géométrie nouvelle, ... ouvrant une ère nouvelle ...' etc. (124-125). Preuve: à cette date, Lobatchevski faisait, devant le conseil de la Faculté des mathématiques, une communication, sous le titre--(français en original)--*Exposition succincte des principes de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*--dans laquelle, selon une remarque de Lobatchevski (1829), les formules trigonométriques fondamentales du triangle hyperbolique, ont été déjà bien établies. En dépit de la clarté redondante des expressions françaises, 'démonstration rigoureuse' et 'théorème des parallèles'--Kagan est d'avis que le développement des formules trigonométriques serait en soi déjà bien suffisant pour accepter comme 'certain' le fait que, dans la communication de Lobatchevski, 'il ne s'agit pas d'une tentative' de démontrer le postulat des parallèles, mais bien de l'établissement des 'principes' de la géométrie non-euclidienne (150-151). Mais l'argument est spécieux. En effet, le développement des propositions et des formules métriques fondamentales du système opposé à celui d'Euclide, est loin de constituer la condition suffisante qui, automatiquement, établira la géométrie non-euclidienne proprement dite. En principe, les formules trigonométriques hyperboliques ne sont pas même nécessaires pour pouvoir parler d'une géométrie non-euclidienne, au sens propre du terme. Absolument nécessaire est, par contre, d'admettre la consistance logique du système des propositions opposées à celles d'Euclide, quoique, en soi, ce théorème métamathématique ne soit pas, lui non plus, condition suffisante de l'existence de la géométrie non-euclidienne. On peut, en effet, bien admettre la consistance d'un tel système sans, pour autant, l'accepter et, même de lui attribuer catégoriquement, la valeur logique du *faux*. Gauss et (probablement indépendamment de lui) les deux Bolyai ont désigné un tel système par le terme 'anti-euclidien'. À partir de Saccheri (1733), ce *système anti-euclidien* fut successivement développé et enrichi par Lambert (1764), Reid (1784), Schweikart (1818), Wachter (1818), Taurinus (1825, 1826) et Gauss (1792-1818). Des formules métriques fondamentales ont été déjà trouvées par Lambert et Schweikart; Gauss était en possession de la trigonométrie anti-euclidienne au plus tard en 1818. Mais Taurinus a déjà bien publié un livre en 1826, où la trigonométrie anti-euclidienne (il utilise le terme 'logarithmo-sphérique') est (presque) complètement développée. L'opposition entre système anti-euclidien et la géométrie non-euclidienne est tranchante: anti-euclidien est le système opposé à celui d'Euclide, si--soumis au principe philosophique préconisant l'admission d'une seule géométrie et d'un unique espace--il est conçu sous le rapport d'une stricte *alternative* avec ce dernier. Si on attribue, donc, la valeur logique du vrai à l'un--l'autre devra être considéré comme faux; (il n'est ni vrai ni faux, si l'autre ne l'est pas). On appelle, par contre, géométrie non-euclidienne, le même système de propositions, dans le cas, où on leur accorde la valeur logique de la *vérité*, sans aucune discrimination--*simultanément*, donc, avec son opposé, la géométrie euclidienne. C'est *l'admission simultanée de la vérité des deux qui constitue l'acte de création de la géométrie non-euclidienne*--une création qui implique nécessairement le remplacement de la philosophie de l'unicité par celle de la *pluralité des systèmes et des espaces géométriques*. Le livre de Taurinus ne contient que le système anti-euclidien, le plus développé, sans pourtant avoir jamais dépassé ce stade. Il est fort probable que, dans sa communication de 1826, Lobatchevski n'a, lui non plus, réalisé que le sommet de son propre développement anti-euclidien, stade, qu'il a dépassé dans les trois années suivantes. Cette hypothèse est corroborée par l'introduction, (quelque peu confuse), de ses *Nouveaux principes de la géométrie avec une théorie complète des Parallèles* de 1835, (УЧЕНЬІЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИЕРСИТЕТА, 1835, p. 3-5; non mentionnée par Kagan)--d'où il ressort, que, dans sa communication de 1826, il aurait déjà admis--d'une facon ou d'une autre--la consistance de la trigonométrie anti-euclidienne, mais qu'il aurait encore préconisé une décision en faveur exclusive de la géométrie euclidienne, s'appuyant sur des arguments plutôt empiriques. Il faut remarquer que la consistance du système anti-euclidien est bien admise aussi par Taurinus dans son travail de 1826; son argument en faveur de la géométrie euclidienne est tiré de la philosophie de l'unicité de la géométrie: si le système anti-euclidien est admis, on devra en admettre, du même coup, une infinité, ce qui lui paraît absurde.

Kagan ne fait aucune distinction entre système anti-euclidien et la géométrie non-euclidienne. Les critères dont il se sert pour distinguer entre ceux qu'il considère avoir été 'créateurs' de la géométrie non-euclidienne et ceux dont il refuse ce titre, sont non seulement confus et irrélévants, mais aussi contradictoires. Ainsi on a d'abord l'impression que c'est l'*acte de la publication* qui servirait de critère pour être reconnu comme 'créateur', puisque ce qualificatif est refusé à Gauss, justement parce qu'il n'a rien publié, tandis que Bolyai, lui, est considéré comme 'créateur' seulement à partir de 1832, date de la (deuxième) publication de sa *Science Absolue*, sous forme d'un *Appendix* au manuel de son père. Mais ce critère ne s'applique, paraît-il, qu'à Gauss et à Bolyai, puisque Lobatchevski est considéré comme le 'créateur' de la géométrie non-euclidienne déjà en 1826, à une date ou il n'a encore rien publié. Le critère de la publication ne s'applique non plus à Taurinus, qui n'est pas du tout 'créateur' de la géométrie non-euclidienne, quoique' il ait publié son travail en 1826. Pour éliminer Taurinus, Kagan fait valoir un autre critère: lourdeur de ses calculs et caractère 'succict et quelque peu obscur' de son style (326). Par contre, Lobatchevski reste (et à juste titre) 'créateur' de la géométrie non-euclidienne, quoique son mémoire de 1829 a été 'rédigé d'une façon si concise et se lit si difficilement qu'il était probablement impossible à comprendre' (215; cp. aussi 150-151, 240).

L'inconsistance des critères de la création de la géométrie non-euclidienne est en pleine harmonie avec la manière dont Kagan juge les contributions scientifiques des divers auteurs. Des beaux éloges lyriques accompagnent déjà la présentation de la communication de 1826 de Lobatchevski, qui à cette date, aurait déjà développé 'les principes' de la géométrie euclidienne. Par contre, dans son manuscrit de 1825, Bolyai n'aurait pas encore établi la géométrie non-euclidienne, justement parce que ce ne sont que ces 'principes' qu'il y aurait exposés (318). (Remarque: ce travail contenait les premiers 29 paragraphes de son futur *Appendix*, donc les formules trigonométriques fondamentales de la géométrie absolue et hyperbolique, et, surtout, la reconnaissance simultanée de la géométrie euclidienne et non-euclidienne, sous la dénomination 'système Σ' et 'système .) Mais l'*Appendix* même souffre--selon Kagan--d'une exposition 'schématique', d'un style 'extrêmement concis' et de l'emploi de la langue latine, 'ce qui le rendait inaccessible'

(322); (on sait que le travail de Lobatchevski est en russe). En somme, par rapport aux contributions de Lobatchevski, 'les résultats de Bolyai paraissent bien modestes' (333). En ce qui concerne Gauss, sa lettre historique de 1824, à Taurinus, (le premier document offrant un aperçu complet de la géométrie non-euclidienne proprement dite), ne contient--selon Kagan--que les 'premiers pas (des propositions initiales)' d'une géométrie non-euclidienne; d'ailleurs, 'son héritage' atteste 'à quel point est insignifiant' tout ce que Gauss a accompli, par rapport à Lobatchevski (313). Donc--et à double titre--il ne peut pas être considéré comme 'créateur', même pas sur troisième place, de la géométrie non-euclidienne (333). En outre, Gauss et Bolyai ont, tous les deux, un bien mauvais caractère: Gauss est mesquin, 'dur envers les jeunes savants' (319-321), et poltron (333); Bolyai--querelleur asocial (317), chicaneur (324), et 'mélancolique' (333). Par contre, Lobatchevski est ferme, altruiste, courageux (333), 'fait preuve d'une orientation progressiste' déjà dans son manuel de *Géométrie* de 1823 (non publié), c'est un 'matérialiste empiriste conséquent' (115), 'adversaire résolu de tout mysticisme, de toute métaphysique', répandues--nous renseigne Kagan--parmi l'intelligentzia libérale, affiliée à la 'Société Biblique' et aux 'Loges maçonniques' (273).

Enfin, Kagan mentionne que la *Géométrie* de 1823 de Lobatchevski est 'la première oeuvre au monde dans laquelle' la *géométrie absolue* aurait déjà été exposée 'tout à fait séparément' (146). Cette idée est due certainement à une confusion terminologique. En effet, on ne peut parler d'un système absolu qu'à partir du moment où l'indépendance logique du postulat des parallèles est catégoriquement admise. Or, dans sa *Géométrie*, Lobatchevski est persuadé du contraire, et confond la géométrie euclidienne avec la géométrie absolue--erreur commune de ceux qui croyaient à une solution conventionnelle du problème des parallèles. D'ailleurs, au sens propre du terme, le premier système absolu se trouve développé dans les *Eleménts* d'Euclide (livre 1, prop. 1-28).

Une présentation rigoureuse de la succession des événements historiques dans le développement des idées de Gauss, Lobatchevski et Bolyai, avec une analyse parallèle irréprochable de la contribution de chacun d'eux, se trouve, d'ailleurs, dans le mémoire compréhensif du même Kagan, publié simultanément avec son livre sur Lobatchevski: СТРОЕНИЕ НЕЕВКПИБОВОЙ ГЕОМЕТРИИ У ЛОБАЧЕВСКОГО ГАУССА И БОЛЬАИ (*L'édification de la géométrie non-euclidienne chez Lobatchevski, Gauss et Bolyai*; ТРУДЫ ИНСТИУТА ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОУНАНИЯ АК. НАУК СССР , vol. II, 1948, 323-389) ainsi que dans ses commentaires à l'édition russe de l'*Appendix* de Bolyai (ЯНОШ БОЛЬАИ , Appendix-- ПРИЛОЖЕНИЕ , 1950).